Ontdekken met priemgetallen

Werken met priemgetallen kan een interessante ontdekkingstocht zijn. Op het eerste gezicht zijn er vaak geen patronen te herkennen maar als je dan verder kijkt zijn er toch veel regelmatigheden waar we veel van kunnen leren.

Een priemgetal is een positief, geheel getal dat alleen 1 en zichzelf als deler heeft. Enkele voorbeelden voor priemgetallen zijn: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. (Let op: 1 is geen priemgetal.)

Opgaven

1. In de beschrijving hierboven zie je 10 priemgetallen. Verifieer dat deze wel priemgetallen zijn. Check ook dat er geen andere priemgetallen zijn onder 30.

2. Kun je andere priemgetallen vinden onder 50?

3. Een *priemtweeling* is een priemgetallenpaar waarbij het verschil 2 is. Enkele voorbeelden van priemtweelingen zijn: $(3, 5)$, $(11, 13)$ of $(17, 19)$. De eerste tien priemtweelingen zijn:

3	5
5	7
11	13
17	19
29	31
41	43
59	61
71	73
101	103
107	109

   We gaan deze priemtweelingen verkennen. We laten de eerste priemtweeling $(3, 5)$ buiten beschouwing; deze kan verwarrend zijn in de volgende verkenning. Start in deze opdracht dus bij de kleinste priemtweeling $(5, 7)$.
   Als je kijkt naar de getallen in de tabel, zie je dan regelmatigheden? Wat valt je op? Zijn er patronen die steeds tevoorschijn komen?

4. Wat valt je op als je een priemgetal kwadrateert en daar 1 van af haalt?

Terugkoppeling

Voordat je de terugkoppeling leest probeer, ook als docent, de opgaven zelf op te lossen. Daardoor ontwikkel je je vaardigheden in de verkenning van en je kennis over priemgetallen. Deze helpen je om meer van het geven van lessen te genieten en om meer op de leerlingen te kunnen letten.

1. Deze opgave heeft twee doelen. Ten eerste is het doel om beter kennnis te maken met priemgetallen. Het tweede doel is meer algemeen: om een wiskundige definitie te gebruiken om logisch te redeneren.
   Het beste is als de leerlingen eerst zelf een voor een alle mogelijke getallen van 2 tot en met 30 verifiëren. (Dit is dus 29 verificaties.) Hieronder werken we een voorbeeld uit van twee priemgetallen en twee *samengestelde getallen*.

   - 2 is een priemgetal omdat dit alleen door 1 en door 2 (zichzelf) deelbaar is.
   - 7 is ook een priemgetal omdat dit door 1 en 7 deelbaar is, en nier door 2, 3, 4, 5 en 6.
   - 4 is geen priemgetal (we noemen het dan een samengesteld getal) omdat 4 ook het getal 2 als deler heeft en niet alleen 1 en zichzelf.
   - Op dezelfde manier kun je ook bijvoorbeeld zien dat 26 een samengesteld getal is: 2 of 13 zijn delers, naast 1 en 26.

2. Ja, er zijn 5 meer priemgetallen onder 50: $31, 37, 41, 43, 47$.
   De eerste 15 priemgetallen zijn dus:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

3. Een interessante eigenschap van priemtweelingen is dat het getal wat tussen de tweelinggetallen inligt door 6 te delen is.

   Dit kan bijvoorbeeld ontdekt worden door te *proberen*. Daarvoor hebben leerlingen wat tijd nodig, maar over het algemeen vinden ze dit patroon.

   De volgende uitdaging is om dit vermoeden te bewijzen. Hoe kan bewezen worden dat een getal door 6 deelbaar is? Aangezien $6 = 2 \cdot 3$ en 2 en 3 priemgetallen zijn, is het voldoende aan te tonen dat dit getal door beide getallen, 2 en 3, te delen is.

   Omdat de twee getallen die de priemtweeling vormen priem zijn, zijn ze niet te delen door 2 of 3. Daardoor moet het tussenliggende getal door beide te delen zijn. (In het algemeen is een van twee opeenvolgende getallen even, en is een van drie opeenvolgende getallen door 3 te delen.)

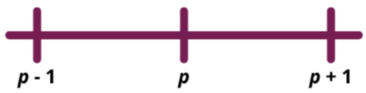
Kortom, het getal tussen de priemtweeling is zowel door 2 als 3 te delen, waardoor dit door 6 deelbaar is.

Opmerking: Na deze opgave is het goed om te vertellen dat er vermoedens zijn in de wiskunde die niemand kan bewijzen. Een van de belangrijkste vermoedens dat wiskundigen al honderden jaren proberen te bewijzen, is het *priemtweelingvermoeden*. Het vermoeden is dat er oneindig veel priemtweelingen zijn. We weten tot op de dag van vandaag nog niet of dit vermoeden wel of niet waar is.

4. Als je de kwadraten van een priemgetal neemt en daar 1 van af haalt, kun je nog iets interessants ontdekken. Je kunt zien dat $5^2 - 1 = 24, 7^2 - 1 = 48, 11^2 - 1 = 120$, enz. Deze getallen zijn steeds door 24 te delen.

   Je kunt leerlingen de volgende opgave voorleggen: Bewijs dat voor ieder priemgetal p (vanaf 5) geldt dat $p^2 - 1$ door 24 te delen is. Dit is dus eerst een *vermoeden* dat bij de eerste zoveel gevallen geldt. Met wiskundige notatie kan dit vermoeden als volgt geschreven worden: $24|p^2 - 1$.

   Bewijs: We weten dat: $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. We bewijzen dat het product $(p - 1)(p + 1)$ door 8 én 3 deelbaar is, waardoor het ook door 24 deelbaar is. Bij het bewijs kan de volgende afbeelding handig zijn:



   Allereerst zijn $p - 1$, p en $p + 1$ drie opeenvolgende getallen. Omdat $p > 3$ een priemgetal is, is dit oneven en niet door 3 te delen. De twee getallen $p - 1$ en $p + 1$ zijn daarom wel even.
   Sterker nog, een van deze opeenvolgende even getallen is niet alleen door 2 maar ook door 4 te delen. Een van de twee opeenvolgende even getallen $p-1$ en $p+1$ is immers door 4 te delen. Daarom is $(p-1)(p+1)$ door 8 te delen (omdat een van de twee door 2 en de andere door 4 te delen is, dus samen door 8).
   Verder is $p - 1$ of $p + 1$ door 3 te delen. In een groep van drie getallen is er namelijk altijd een te delen door 3. Dit is niet p, aangezien dat een priemgetal is, dus dan moet $p - 1$ óf $p + 1$ deelbaar zijn door 3.

Samenvattend, $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ is zowel deelbaar door 8 als door 3, en daardoor is $p^2 - 1$ deelbaar door 24 (want $3 \cdot 8 = 24$).

Opmerkingen:

- Al deze stappen kunnen leerlingen ontdekken, waarbij het wel belangrijk is dat ze genoeg tijd hebben. Ze kunnen eerst individueel nadenken over deze opgave, en daarna kunnen ze samenwerken. Het kan ook een huiswerkopdracht zijn om hun opmerkingen verder uit te werken. Samenwerken is een aanrader, ook bij het huiswerk.De volgende les kunnen de verschillende strategieën en bewijzen besproken worden.
- Een gedetailleerde video over deze opgave van Matt Parker is te zien op het Numberphile YouTube-kanaal.