

Welk getal is groter?

In deze opdracht krijg je kleine opgaven die niet veel berekening vergen. Het is wel belangrijk dat je aan iedere opgave genoeg tijd besteed en je met de problematiek speelt. Probeer maar allerlei mogelijkheden en verschillende aanpakken uit. Het kan ook helpen als je met kleinere getallen dan wat je in de opgave ziet, experimenteert. Probeer deze opgaven zonder rekenmachine te doen.

We weten zeker dat je al deze opgaven op kan lossen. Als je vastloopt kun je de opgave loslaten en na een tijdje terugkomen. Tevens kun je de opgaven met anderen bespreken. Als jullie over een opgave brainstormen let op ieder idee; soms kunnen de vreemdste ideeën naar een belangrijke stap leiden in de richting van de oplossing.

Het is nuttig om enkele algebraïsche spelregels te kennen voordat je deze opgaven doet. We verzamelen hieronder de belangrijkste rekenregels die je over machtsverheffing moet weten:

$$a^0 = 1 \ (a \neq 0); \quad a^1 = a \ (a \neq 0);$$

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l}; \quad (a^k)^l = a^{kl};$$

Welk getal is groter?

1. 2^{300} of 3^{200} ?
2. 2^{100} of 10^{30} ?
3. 3^{21} of 2^{31} ?
4. 9^{20} of 27^{13} ?
5. 3^{500} of 7^{300} ?
6. 2022^{10} of $2021^{10} + 2021^9$?
7. Kun je een algemenere formulering maken van de laatste opgave?

Terugkoppeling

1. 2^{300} of 3^{200} ?

- Het idee is om beide getallen als de 100-de macht te schrijven: 8^{100} of 9^{100} . Daarom is 3^{200} groter.
- $2^{300} = 2^{3 \cdot 100} = (2^3)^{100} = 8^{100} < 9^{100} = (3^2)^{100} = 3^{2 \cdot 100} = 3^{200}$.

2. 2^{100} of 10^{30} ?

- Het idee is om beide getallen als de 10-de macht te schrijven: 1024^{10} of 1000^{10} . Daarom is 2^{100} groter.
- $2^{100} = 2^{10 \cdot 10} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} < 1000^{10} = (10^3)^{10} = 10^{3 \cdot 10} = 10^{30}$.

3. 3^{21} of 2^{31} ?

- Het idee is om beide getallen als coëfficiënt keer de 10-e macht te schrijven: $3 \cdot 9^{10}$ of $2 \cdot 8^{10}$. Daarom is 3^{21} groter.
- $3^{21} = 3^{1+20} = 3 \cdot 3^{20} = 3 \cdot 3^{2 \cdot 10} = 3 \cdot (3^2)^{10} = 3 \cdot 9^{10} < 2 \cdot 8^{10} = 2 \cdot (2^3)^{10} = 2 \cdot 2^{30} = 2^{31}$.

4. 9^{20} of 27^{13} ?

- Het idee is om beide getallen als een macht van 3 te schrijven: 3^{40} of 3^{39} . Daarom is 9^{20} groter.
- $9^{20} = (3^2)^{20} = 3^{40} > 3^{39} = 3^{3 \cdot 13} = (3^3)^{13} = 27^{13}$.

5. 3^{500} of 7^{300} ?

- Het idee is om beide getallen als een 100-e macht te schrijven. 7^{300} groter.
- $3^{500} = (3^5)^{100} = 243^{100} < 343^{100} = (7^3)^{100} = 7^{300}$.

6. 2022^{10} of $2021^{10} + 2021^9$?

- Omdat $2021^{10} + 2021^9 = 2021^9(2021 + 1) = 2021^9 \cdot 2022$ en $2022^{10} = 2022^9 \cdot 2022$, is 2022^{10} groter.
- Generalisatie (als beide getallen worden veralgemeend): $(n+1)^{k+1} > n^{k+1} + n^k$.